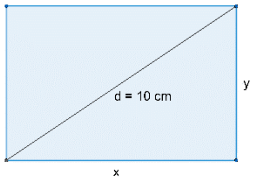
Ejercicio 1A del Modelo 2 (Ordinaria Colisiones) de 2023 (Análisis)

De entre todos los rectángulos de diagonal 10 cm (cada una), calcula las dimensiones del que tiene mayor área.

Solución



La función a optimizar es el área del rectángulo. Área = x · y

Relación entre variables: $y^2 + x^2 = 10^2$, de donde $y = \sqrt{100 - x^2}$, es (+) puesto que es una longitud.

Mi función es $A(x) = x\cdot\sqrt{100 - x^2}$

El máximo anula la 1ª derivada A'(x)

$$A'(x) = \sqrt{100 - x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} + x\cdot\frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0$$

De A'(x) = 0, tenemos $100 - 2x^2 = 0$, de donde $x = \sqrt{50}$, pues es una longitud.

Las dimensiones del rectángulo son $x = \sqrt{50}$ e $y = \sqrt{50}$, por lo que sería un cuadrado.

Veamos que es un máximo, damos valores intermedios antes y después de $x = \sqrt{50}$

$A'(3) = \dfrac{100 - 2(3)^2}{\sqrt{100 - (3)^2}} = \dfrac{82}{9} > 0$ El área es estrictamente creciente antes de $x = \sqrt{50}$

$A'(8) = \dfrac{100 - 2(8)^2}{\sqrt{100 - (8)^2}} = \dfrac{100 - 128}{6} = \dfrac{-28}{6} < 0$ El área es estrictamente decreciente después de $x = \sqrt{50}$

Por tanto, en $x = \sqrt{50}$ habrá un máximo y el área es máxima.

Ejercicio 2A del Modelo 2 (Ordinaria Colisiones) de 2023 (Análisis)

Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x|x|}$, para $x \neq 0$.

(a) (1 punto) Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de f, así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.

(b) (1,5 puntos) Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

Solución

Considera la función $f(x) = \dfrac{1}{x|x|}$, para $x \neq 0$.

(a)

Calcula los intervalos de concavidad y de convexidad de f, así como los puntos de inflexión de su gráfica, si existen.

La función se descompone en una función a trozos:

$$f(x) = \frac{1}{x|x|} = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2} \text{ que ocupa el 3er y 4º cuadradante, si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x^2} = x^{-2} \text{ que ocupa el 1er y 2º cuadradante, si } x \geq 0 \end{cases}$$

El punto crítico sale de igualar a 0 el valor absoluto: x = 0

Condición de Puntos de Inflexión: f ''(x) = 0 y f '''(x) ≠ 0.

Primera derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{-3} & \text{si } x < 0 \\ -2x^{-3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Segunda derivada:

$$f''(x) = \begin{cases} -6x^{-4} = \dfrac{-6}{x^4} & \text{si } x < 0 \\ 6x^{-4} = \dfrac{6}{x^4} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-6}{x^4} = 0 ;\ -6 \neq 0 \\ \dfrac{6}{x^4} = 0 ;\ 6 \neq 0 \end{cases}$$

. La función no tiene Puntos de Inflexión.

Intervalos de curvatura: (-∞,0) (0,+∞)
Damos valores intermedios:

$f''(-1) = \dfrac{-6}{(-1)^4} = \dfrac{-6}{1} = -6 < 0$ Cóncava en (-∞, 0)

$f''(1) = \dfrac{6}{(1)^4} = \dfrac{6}{1} = 6 > 0$ Convexa en (0, +∞)

(b)
Estudia y calcula las asíntotas de la función. Esboza su gráfica.

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a^+} [\,(f(x)\,] = \infty$

Como $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{-x^2} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$; y $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$, la recta **x = 0 es una A.V. de la gráfica de f(x).**

Como la función f es un cociente de funciones polinómicas, con menor grado en el numerador que en el denominador, f(x) tiene una asíntota horizontal (A.H.) en ±∞. Como hay A.H en ±∞, f no tiene asíntotas oblicuas (A.H.) en ±∞.

Como $\lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{-x^2}\right) = \dfrac{1}{-\infty} = 0^-$; la recta **y = 0 es una A.H.** de la gráfica de f(x), y esta está por debajo de la A.H., cuando x tiende a - ∞.

Como $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+$; la recta **y = 0 es una A.H.** de la gráfica de f(x), y esta está por encima de la A.H., cuando x tiende a + ∞.

Como en este caso hay A.H, no hay asíntotas oblicuas (A.O.)

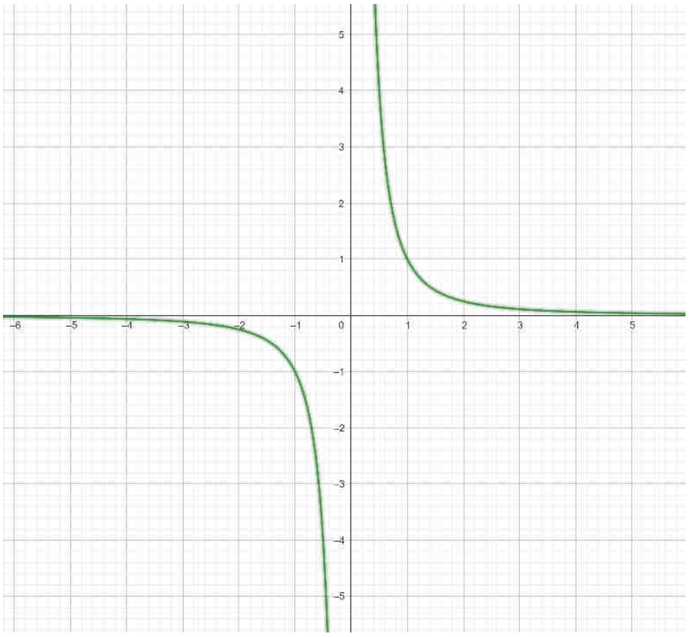
Esbozo de la gráfica:

$f(-2) = \dfrac{-1}{4}$

$f(-1) = -1$

$f(1) = 1$

$f(2) = \dfrac{1}{4}$



Ejercicio 3A del Modelo 2 (Ordinaria Colisiones) de 2023 (Análisis)

Determina la función f: (0,+∞) → R, sabiendo que es dos veces derivable, su gráfica pasa por el punto (1, 0), f'(e) = e y f''(e) = 2 ln(x) + 1, para todo x > 0 (ln denota la función logaritmo neperiano).

Solución

$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int (2\ln(x) + 1)\,dx = (1)$

$$\int \ln(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x) \;\rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \;\rightarrow\; v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln(x) - \int \frac{x}{x}dx = x \cdot \ln(x) - x;$$

(1) = 2 (x · ln(x) - x) + x = 2 x ln(x) - x + C

Como f '(e) = e $\rightarrow$ f '(e) = 2 e ln(e) - e + C = e; 2 e - e + C - e = 0; $\rightarrow$ C = 0

f '(x) = 2 x ln(x) - x

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x\ln(x) - x)\,dx = \int 2x\ln(x)\,dx - \int x\,dx = (2)$$

$$\int x\ln(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x) \;\rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \;\rightarrow\; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2x}dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

$$(2) = 2\left(\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{2} = x^2\ln(x) - x^2 + D$$

Como f (1) = 0; $\rightarrow$ f (1) = 1^2 ln(1) - 1^2 + D = 0; $\rightarrow$ D = 1

f (x) = x^2 ln(x) - x^2 + 1

Ejercicio 4A del Modelo 2 (Ordinaria Colisiones) de 2023 (Análisis)

Considera las funciones f,g: R → R definidas por $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = x + 5$.

(a) (1,25 puntos) Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.
(b) (1,25 puntos) Determina el área del recinto anterior.

Solución

(a)
Calcula los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones y esboza el recinto que determinan.

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{Parábola convexa con vértice en } x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow V(0, -1) \\ -x^2 + 1 & \text{Parábola cóncava con vértice en } x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0 \rightarrow V(0, 1) \end{cases}$$

El punto crítico sale de igualar a 0 el valor absoluto: x^2 - 1 = 0; x = $\pm$1, luego f tiene tres tramos:

$$f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$g(x) = x + 5$ Recta con pendiente positiva m = 1, y ordenada en el origen n = 5.

Dando valores a x obtenemos los siguientes puntos de sus gráficas:

f (- 2) = $|(-2)^2 - 1|$ = 3; f (0) = $|(0)^2 - 1|$ = 1; f (2) = $|(2)^2 - 1|$ = 3;

g (0) = 5; g (2) = 5 + 2 = 7;

Puntos de corte entre las gráficas:

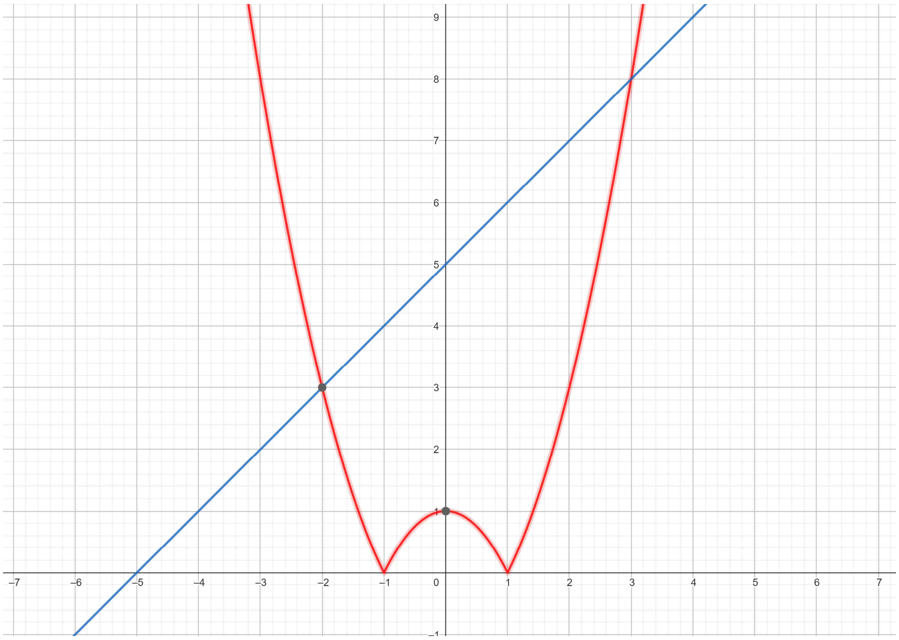
$$x^2 - 1 = x + 5 \;;\; x^2 - x - 6 = 0 \;;\; x = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 > 1 \text{ Válido en este intervalo} \rightarrow f(3) = 8\text{, Punto de corte } (3, 8) \\ -2 < -1 \text{ Válido en este intervalo} \rightarrow f(-2) = 3\text{, Punto de corte } (-2, 3) \end{cases}$$

$$-x^2 + 1 = x + 5 \;;\; x^2 + x + 4 = 0 \;;\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} \text{ no hay puntos de corte en este tramo de f}$$

Con todo lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



(b)
Determina el área del recinto anterior.

$$A = \int_{-2}^{-1}\left(x + 5 - (x^2 - 1)\right) dx + \int_{-1}^{1}\left(x + 5 - (1 - x^2)\right) dx + \int_{1}^{3}\left(x + 5 - (x^2 - 1)\right) dx =$$

$$= \int_{-2}^{-1}\left(- x^2 + x + 6\right) dx + \int_{-1}^{1}\left(x^2 + x + 4\right) dx + \int_{1}^{3}\left(- x^2 + x + 6\right) dx =$$

$$= \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{1} + \left[- \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_{1}^{3} =$$

$$= \left(- \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1)\right) - \left(- \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2} + 6(-2)\right) + \left(\frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} + 4(1)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 4(-1)\right) +$$

$$+ \left(- \frac{(3)^3}{3} + \frac{(3)^2}{2} + 6(3)\right) - \left(- \frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} + 6(1)\right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 6\right) - \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2} - 12\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 4\right) -$$

$$- \left(- \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 4\right) + + \left(- \frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 18\right) - \left(- \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 6\right) = \frac{2 + 3 - 36}{6} - \frac{16 + 12 - 72}{6} + \frac{2 + 3 + 24}{6} -$$

$$- \frac{-2 + 3 - 24}{6} + \frac{-54 + 27 + 108}{6} - \frac{-2 + 3 + 36}{6} = = \frac{-30 + 44 + 30 + 23 + 81 - 37}{6} = \frac{111}{6} = \frac{37}{2}\ u^2$$

Ejercicio 5B del Modelo 2 (Ordinaria Colisiones) de 2023 (Algebra)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcula m para que la matriz A tenga inversa.

b) (1,5 puntos) Para m = 0, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\frac{1}{2}AX + C^4 = B$.

Solución

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a)
Calcula m para que la matriz A tenga inversa.

La matriz A tiene inversa si $\det(A) = |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m+1)^2 + (m-1) + (m-1) - (m-1)^2 - (m+1) - (m+1) = m^2 + 2m + 1 + 2m - 2 - m^2 + 2m - 1 - 2m - 2 =$$

$= 4m - 4$; Si $4m - 4 \neq 0$, A tiene inversa $\rightarrow$ $4m = 4$; $m = 1$; Si $m \neq 1$, A tiene inversa

(b)

Para m = 0, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $\frac{1}{2}AX + C^4 = B$.

$\frac{1}{2}AX + C^4 = B$; $\frac{1}{2}AX = B - C^4$; $AX = 2(B - C^4)$; $A^{-1}AX = 2A^{-1}(B - C^4)$; $X = 2A^{-1}(B - C^4)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^t \qquad |A| = 4\cdot 0 - 4 = -4$$

$$\mathrm{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{-1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \rightarrow C^4 = C^2 \cdot C^2 = I \cdot I = I$$

Luego

$$X = 2A^{-1}(B - C^4) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6B del Modelo 2 (Ordinaria Colisiones) de 2023 (Algebra)

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$, $B = (\alpha \quad 1 \quad 1)$ y $C = (1 \quad 1 \quad 1)$

(a) (1,5 puntos) Discute el sistema BA = C, según los valores de α.
(b) (1 punto) Resuelve el sistema, si es posible, para $\alpha = 0$ y para $\alpha = 1$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix}$, $B = (\alpha \quad 1 \quad 1)$ y $C = (1 \quad 1 \quad 1)$

(a)

Discute el sistema BA = C, según los valores de α.

$$BA = (\alpha \quad 1 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & x \\ z & z & y \end{pmatrix} = (\alpha x + y + z \quad \alpha y + x + z \quad \alpha z + x + y) = (1 \quad 1 \quad 1) \rightarrow \begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$$ no puedo asegurar el rango de M = 2, por lo que calculo $|M|$

$$|M| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + 1 + 1 - \alpha - \alpha - \alpha = \alpha^3 - 3\alpha + 2 \text{ ; Si } |M| \neq 0 \text{, el rango de M será 3.}$$

Haciendo Ruffini, los ceros o raices son $\alpha = 1$ y $\alpha = -2$;

Si $\alpha \neq 1$ o $\alpha \neq -2$, el rango de M = rango M ' = n = 3 $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única)

Estudio para $\alpha = 1$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ las tres filas son idénticas } \rightarrow \text{ rango de M = 1}$$

Para $\alpha = 1$, rango de M = rango M ' = 1 $\neq$ n = 3, sistema compatible indeterminado

Estudio para $\alpha = -2$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \rightarrow \text{ rango M = 2}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 1 + 2 + 2 - 1 = 9 \neq 0 \rightarrow \text{ rango M' = 3}$$

Para $\alpha = -2$, rango de M = 2 $\neq$ rango M ' = 3, sistema incompatible (sin solución)

(b)

Resuelve el sistema, si es posible, para $\alpha = 0$ y para $\alpha = 1$.

Para $\alpha = 0$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \text{ ; Resuelvo por Cramer:}$$

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 = 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 = 1 \rightarrow z = \frac{1}{2}$$

Estudio para $\alpha = 1$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{ Elimino la segunda y tercera línea por ser idénticas: } x + y + z = 1$$

Si $y = \lambda$, y $z = \mu \rightarrow x = 1 - \lambda - \mu \rightarrow$ Solución $(1 - \lambda - \mu, \quad \lambda, \quad \mu)$

Ejercicio 7B del Modelo 2 (Ordinaria Colisiones) de 2023 (Geometría)

Determina el punto simétrico de A (2, -4, -3) con respecto al plano que contiene a los puntos B (1, 1, 2), C (0, 1/3, 1) y D (-3, 0, 3).

Solución

Primero debo hallar el plano formado por los tres puntos dados B, C y D.

Tomo el punto B $(1, 1, 2)$ y los vectores $\overrightarrow{BC} = \left(-1, \frac{-2}{3}, -1\right) \simeq (3, 2, 3)$ y $\overrightarrow{BD} = (-4, -1, 1)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; 2(x-1) - 12(y-1) - 3(z-2) + 8(z-2) + 3(x-1) - 3(y-1) = 0 \; ;$$

$2x - 2 - 12y + 12 - 3z + 6 + 8z - 16 + 3x - 3 - 3y + 3 = 0$;

$5x - 15y + 5z = 0$; $\pi \equiv x - 3y + z = 0$

Hallo una recta perpendicular que pasa por A:

$\pi \equiv x - 3y + z = 0 \rightarrow \vec{n} = (1, -3, 1) = \vec{u}$ (vector director de la recta)

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -4 - 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

Hallo la intersección de π y r como punto medio de A y A':

$(2 + \lambda) - 3(-4 - 3\lambda) + (-3 + \lambda) = 0$; $2 + \lambda + 12 + 9\lambda - 3 + \lambda = 0$;

$11\lambda + 11 = 0$; $\lambda = -1 \rightarrow M(2 - 1, -4 + 3, -3 - 1) = (1, -1, -4)$

Hallo A' (x, y, z) simétrico de A con M como punto medio de A y A':

$1 = \frac{x+2}{2}; \rightarrow 2 = x + 2 \; ; \; x = 0$

$-1 = \frac{y-4}{2}; \rightarrow -2 = y - 4 \; ; \; y = 2$

$-4 = \frac{z-3}{2}; \rightarrow -8 = z - 3 \; ; \; z = -5$

Solución: A' (0, 2,- 5)

Ejercicio 8B del Modelo 2 (Ordinaria Colisiones) de 2023 (Geometría)

Dados los puntos O (0, 0, 0), A (2, -1, 0), B (3, 0, x) y C (-x, 1, -1), los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un paralelepípedo.

(a) (1,5 puntos) Calcula los posibles valores de x sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.

(b) (1 punto) Para x = 1, halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices O, A y B.

Solución

Dados los puntos O (0, 0, 0), A (2, -1, 0), B (3, 0, x) y C (-x, 1, -1), los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ determinan un paralelepípedo.

(a)

Calcula los posibles valores de x sabiendo que el volumen del paralelepípedo es 5 unidades cúbicas.

El volumen del paralelepípedo se calcula mediante el producto mixto de tres vectores no coplanarios:

Vector OA = (2, -1, 0), vector OB = (3, 0, x) y vector OC = (-x, 1, - 1)

$$Vp = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & x \\ -x & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left|x^2 - 2x - 3\right| = 5\ u^3 \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0 \\ -x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \text{ sin solución Real}$$

Para x = 4 y x = - 2, el volumen del paralelepípedo es 5 u^3

(b)

Para x = 1, halla el área de la cara del paralelepípedo que contiene a los vértices O, A y B.

Calculamos el área de la cara del paralelepípedo como el área del paralelogramo que forman los vértices O, A y B, es decir, con el módulo del vector producto vectorial de los vectores OA y OB.

$\overrightarrow{OA} = (2, -1, 0)$; $\overrightarrow{OB} = (3, 0, 1)$

Área paralelogramo = $\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|$

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \vec{i}(-1 - 0) - \vec{j}(2 - 0) + \vec{k}(0 + 3) = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \rightarrow (-1, -2, 3).$$

Área paralelogramo = $\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}\ u^2$.